МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

1 септември 2009 г. – <u>Вариант 2</u>

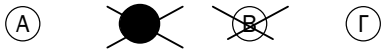
УВАЖАЕМИ ЗРЕЛОСТНИЦИ,

Тестът съдържа **28 задачи** по математика от **два вида**:

- 20 задачи със структуриран отговор с четири възможни отговора, от които само един е верен;
- 8 задачи със свободен отговор.

Първите 20 задачи (от 1. до 20. включително) в теста са от затворен тип с четири възможни отговора, обозначени с главни букви от А до Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте със син/черен цвят на химикалката в **листа за отговори**, а не върху тестовата книжка. Отбелязвайте верния отговор със знака **X** в кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и отбележете буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:



За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор на съответната задача се приема само този, чиято буква е отбелязана със знака X .

Отговорите на **задачите със свободен отговор (от 21. до 28. вкл.)** запишете в предоставения **свитък за свободните отговори**, като за задачи **от 26. до 28. вкл.** запишете пълнете решения с необходимите обосновки.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!

Отговорите на задачите от 1. до 20. вкл. отбелязвайте в листа за отговори!

1. Дадени са числата $M = 3\frac{1}{3}\%$ **от** 20 **и** $N = 0,667$ **. Вярно е, че:**

А) $M > N$ **Б)** $M < N$ **В)** $M = N$ **Г)** M и N не могат да се сравнят

2. Сумата $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$ **е равна на:**

А) $4-2\sqrt{3}$ **Б)** -4 **В)** 0 **Г)** $4+2\sqrt{3}$

3. Изразът $\frac{2-x}{x+3} : \frac{x^2-4}{2x}$ **е дефиниран при:**

А) $x \neq 0$ **Б)** $x \neq 0, x \neq -3$ **В)** $x \neq 0, x \neq 2, x \neq -2$ **Г)** $x \neq 0, x \neq -3, x \neq \pm 2$

4. Ако x_1 **и** x_2 **са корените на уравнението** $x^2 + 10x + 20 = 0$ **, то стойността на израза** $\frac{x_1x_2^2 + x_1^2x_2}{30 + x_1 + x_2}$ **е:**

А) -10 **Б)** $\frac{1}{4}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** 5

5. Броят на пресечните точки на графиките на функциите $f(x) = x^2 - 5x + 3$ **и** $g(x) = 1 + x^2$ **са:**

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

6. Корените на уравнението $(x-3).\sqrt{x-5} = 0$ **са числата:**

А) 3 **Б)** 3 **и** 5 **В)** 5 **Г)** 5 **и** 9

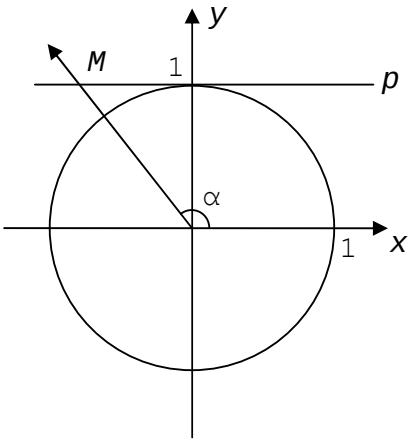
7. Стойността на израза $\log_3 9 - \lg\frac{1}{100} - 2^{2009}.\log_5 1$ **е равна на:**

А) 0 **Б)** 1 **В)** 4 **Г)** 5

8. Решенията на неравенството $\frac{3-x}{x-1} \leq 0$ **са**:

А) $x \in [1;3]$ **Б)** $x \in (-\infty;1) \cup [3;+\infty)$

В) $x \in (1;3]$ **Г)** $x \in (-\infty;1] \cup (3;+\infty)$



9. На чертежа е построена единичната окръжност и права p**, която се допира до окръжността в точка с ордината 1. Първото рамо на ъгъл** α **съвпада с положителната посока на абсцисната ос. Второто рамо на ъгъл** α **пресича правата** p **в точка** M**, както е показано на чертежа. За ъгъл** α **абсцисата на точка** M **е стойността на функцията:**

А) синус **Б)** косинус

В) тангенс **Г**) котангенс

10. Дадена е окръжност $k\left(O, r = 0{,}8\,cm\right)$ **и точки** A **и** B **от окръжността, такива че радианната мярка на** $\angle AOB$ **е** 5**. Дължината на принадлежащата дъга** AB **на този ъгъл е:**

А) $2\,cm$ **Б)** $4\,cm$ **В)** $6\,cm$ **Г)** $8\,cm$

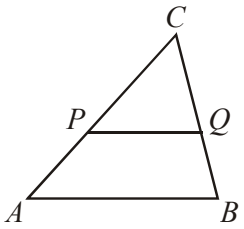
11. За геометричната прогресия $a_1, a_2, ..., a_5$ **е известно, че** $a_3 = -2$**. Произведението** $a_1.a_5$ **е равно на:**

А) -4 **Б**) -2 **В)** 2 **Г)** 4

12. Ако средното аритметично на числата $a, -5, -3$ **и** -2 **е равно на** -1**, то числото** a **е:**

А) -4 **Б)** 5 **В)** 6 **Г)** 8

13. Ако на чертежа $AC : PC = 5:3$ **и** $PQ \parallel AB,$ **то отношението на лицата** $S_{PQC} : S_{ABQP}$ **е равно на:**

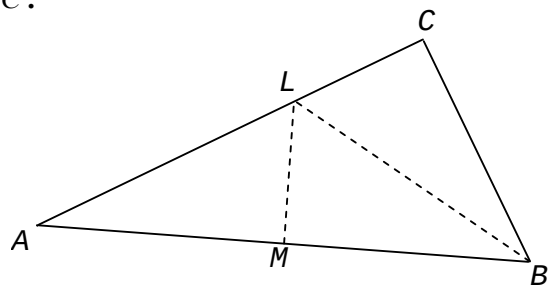


А) $3:5$ **Б)** $3:2$ **В)** $9:25$ **Г)** $9:16$

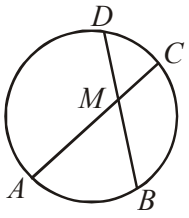
14. В ΔABC BL **е ъглополовящата на** $\angle ABC$**,** LM **е медиана в** ΔABL**,** $AL = BL = 2\sqrt{3}$**,** $LC = \sqrt{3}$ **и** $\Delta ALM \sim \Delta ABC$**.**

Страната BC **на** ΔABC **е равна на:**

А) 3 **Б)** 6 **В)** $2\sqrt{3}$ **Г)** $3\sqrt{3}$



15. На чертежа хордите AC и BD се пресичат в точка M. Ако $BM = 12\ \ cm$, $DM = 9\ \ cm$ и $AM : AC = 4 : 7$, то НЕ е вярно, че:



А) $AB \parallel CD$ **Б)** $S_{AMB} : S_{DMC} = 2 : \sqrt{3}$

В) $S_{AMD} : S_{DMC} = 4 : 3$ **Г)** $DC : AB = 3 : 4$

16. Вписаната в правоъгълен триъгълник окръжност се допира до хипотенузата AB в точка M. Отсечката AM е 4, а хипотенузата е 10. Лицето на триъгълника е:

А) 12 **Б)** 24 **В)** 40 **Г)** 48

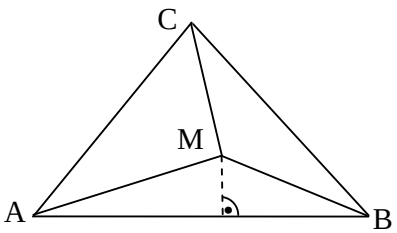
17. Ако BC е най-голямата страна в разностранния ΔABC, а d е диаметърът на описаната около триъгълника окръжност и $BC : d = 1 : \sqrt{2}$, то мярката на $\angle BAC$ е:

А) 45° **Б)** 135° **В)** 120° **Г)** 60°

18. В остроъгълния ΔABC страната $BC = 7\ cm$ и $AB = 5\ \ cm$. Ако R е радиусът на описаната около триъгълника окръжност и $BC : R = \sqrt{3}$, то дължината на страната AC е равна на:

А) $6\ cm$ **Б)** $\sqrt{39}\ cm$ **В)** $8\ cm$ **Г)** $\sqrt{109}\ \ cm$

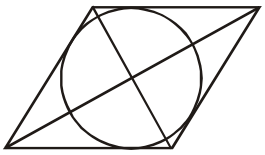
19. ΔABC е равностранен със страна $AB = 4\sqrt{3}\ \ cm$. Точка M е вътрешна за триъгълника и е такава, че лицата на триъгълниците ABM, BCM и ACM се отнасят съответно както $1:2:3$. Разстоянието от M до AB е равно на:



А) $1\ cm$ **Б)** $2\ cm$

В) $3\ cm$ **Г)** $6\ cm$

20. Ако страната на ромб е $12\ \ cm$ и един от ъглите му е 60°, то радиусът на вписаната в ромба окръжност е равен на:



А) $3\ cm$ **Б)** $3\sqrt{3}\ cm$

В) $6\ cm$ **Г)** $6\sqrt{3}\ cm$

Отговорите на задачите от 21. до 25. вкл. запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Запишете най-малкото цяло число x, за което е изпълнено неравенството

$$2.\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+5.\left(\frac{2}{3}\right)^{x}<7$$

22. Ако се съберат първият и пети член на аритметична прогресия се получава 18**, а ако от седмия се извади сборът на втория и трети член на тази прогресия се получава** 1**. Намерете сбора на първите** 10 **члена на прогресията.**

23. Намерете стойността на израза $tg75^{\circ}+\frac{1}{tg75^{\circ}}$**.**

24. Основата на равнобедрен триъгълник е $30\ cm$**, а центърът на вписаната в триъгълника окръжност дели височината към основата в отношение** $5:13$**, считано от основата. Да се намери лицето на триъгълника в квадратни сантиметри.**

25. Нека k **е случайно избрано число измежду** 5 **цели числа. Намерете вероятността числото** $cotg\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$ **да е ирационално число.**

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от26. до 28. вкл. запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Решете уравнението $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}+1=6\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}$**.**

27. Дадени са пет отсечки с дължини $2\ cm$**,** $3\ cm$**,** $4\ cm$ **,** $5\ cm$ **и** $6\ cm$**. Каква е вероятността три случайно избрани от тях да могат да образуват триъгълник?**

28. В триъгълника ABC $BC=6\ cm$**,** $AC=8\ cm$**. Ъглополовящата през върха** C **пресича описаната около триъгълника окръжност в точка** L**. Да се намери страната** AB **в сантиметри, ако** $CL=AC$**.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0 \qquad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Формули на Виет $\quad x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \qquad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a})$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a| \qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a;$ при $k\in\ \}$

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a};$ при $a>0,\ n\geq 2,\ k\geq 2$ и $n, m, k\in\ \}$

$\log_a b=x\Leftrightarrow a^x=b \qquad \log_a a^x=x \qquad a^{\log_a b}=b;$ при $b>0,\ a>0,\ a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=1.2.3...(n-1)n=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^{\ k}}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{1.2.3...(k-1)k}$

Вероятност $\quad P(A)=\dfrac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}} \qquad 0\leq P(A)\leq 1$

Прогресии

Аритметична прогресия: $\quad a_n=a_1+(n-1)d \qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $\quad a_n=a_1.q^{n-1} \qquad S_n=\dfrac{a_nq-a_1}{q-1}=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\ 1+\dfrac{p}{100}^{\ n}$

Зависимости в триъгълник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c^{\,2} = a_1.b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана: $m_a^{\,2} = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b^{\,2} = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$

$m_c^{\,2} = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - nm$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^0-\alpha$	$90^0+\alpha$	$180^0-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{cotg}\alpha$	$-\mathrm{cotg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
cotg	$-\mathrm{cotg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta \quad \sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1 \quad \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta} \qquad \mathrm{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{cotg}\alpha\mathrm{cotg}\beta \quad 1}{\mathrm{cotg}\beta\pm\mathrm{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} \qquad \mathrm{cotg}2\alpha=\frac{\mathrm{cotg}^2\alpha-1}{2\mathrm{cotg}\alpha} \qquad \sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right) \qquad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$